

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.**

1. Έστω μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 12**

2. Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;

**Μονάδες 3**

**B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Αν  $z = x+yi$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$ , τότε:  $|\bar{z}| = |-z|$ .

**Μονάδες 2**

2. Αν  $z = \alpha+\beta i$ , τότε:  $z + \bar{z} = \alpha$ , για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

3. Αν  $x \neq 0$ , τότε ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = -\infty$ .

**Μονάδες 2**

4. Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon\phi x$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$  και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

**Μονάδες 2**

5. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης  $f$  στο  $x_0 \in \mathbb{R}$ , τότε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (k f(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$ , για κάθε σταθερά  $k \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός  $z = \frac{x + 3i}{2 - i}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α. Να βρείτε το  $x$ , ώστε ο αριθμός  $z$  να είναι φανταστικός.

**Μονάδες 10**

- β. Αν  $x = -6$ , να αποδείξετε ότι ο  $z$  είναι πραγματικός αριθμός.

**Μονάδες 6**

- γ. Αν  $x = 4$ , να βρείτε το  $|\bar{z}|$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1 & , x < 1 \\ x^4 - 1 & , x \geq 1 \end{cases}$ .

- α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη συνέχεια.

**Μονάδες 6**

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

γ. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[-1,2]$ .

**Μονάδες 9**

#### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{kx - x^2}{4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο  $O(0,0)$  έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = 1$ .

α. Να αποδείξετε ότι  $k = 4$ .

**Μονάδες 7**

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

**Μονάδες 8**

γ. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα  $(2,4)$  υπάρχει μοναδικό σημείο  $\xi$ , στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $AB$ , όπου  $A(2, f(2))$  και  $B(4, f(4))$ .

**Μονάδες 10**

#### ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας δοθούν.  
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.**
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**